

# 作业 3：约束满足问题 (CSP)

## 一、约束满足问题：字母密码算术

在字母密码算术问题中，已知 “SEND + MORE = MONEY”，每个字母代表 0-9 的唯一整数（首位字母 S、M 不能为 0）。其中 “SEND” “MORE” “MONEY” 分别表示由对应字母组成的四位数、四位数和五位数。请基于约束满足问题的框架解决该问题。

### 1. 变量集合

(2 分) 该问题的变量集合包含哪些元素？(需考虑加法运算中的进位)

该问题的变量集合不仅包含出现的字母，还需包含各列加法产生的进位：

- **字母变量**:  $\{S, E, N, D, M, O, R, Y\}$
- **进位变量**:  $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ 
  - $C_1$ : 个位 ( $D + E$ ) 向十位的进位
  - $C_2$ : 十位 ( $N + R$ ) 向百位的进位
  - $C_3$ : 百位 ( $E + O$ ) 向千位的进位
  - $C_4$ : 千位 ( $S + M$ ) 向万位的进位

### 2. 关键约束条件

(2 分) 写出至少 3 条该问题的关键约束条件 (例如变量取值范围约束、加法运算约束等)

1. **全局互异约束 (AllDiff)**:  $S, E, N, D, M, O, R, Y \in \{0, \dots, 9\}$  且互不相同。
2. **首位非零约束**:  $S \neq 0$  且  $M \neq 0$ 。
3. **列加法约束 (例如千位和万位)**：
  - 千位列:  $S + M + C_3 = O + 10 \times C_4$
  - 万位列 (最高位):  $C_4 = M$

### 3. 启发式变量选择

(3 分) 若采用 “最少剩余值启发式” (MRV) 选择变量，在问题初始阶段 (未赋值任何变量)，应优先选择哪个变量进行赋值？请说明理由

- **优先选择变量**:  $M$  (或  $C_4$ )
- **理由**: MRV 策略要求选择当前合法取值最少的变量。两个四位数相加 (SEND + MORE) 最大结果不超 19998，因此结果 MONEY 的最高位  $M$  只能取值 1。由于  $M$  的定义域大小为 1 (最少)，应最先被赋值。

## 4. 约束传播与更新

(3 分) 已知变量 M 的取值已确定为 1，此时需同步更新哪些变量的取值范围？请说明更新依据

需根据约束  $S + M + C_3 = O + 10M$  同步更新以下变量：

1. **更新 O 的取值范围为 {0}**：代入  $M = 1$ ，得  $S + 1 + C_3 = O + 10$ 。因  $S \leq 9, C_3 \leq 1$ ，等式左边最大为 10，故右边必须为 10，解得  $O = 0$ 。
2. **更新 S 的取值范围为 {8, 9}**：由上式简化得  $S + C_3 = 9$ 。若  $C_3 = 1 \Rightarrow S = 8$ ；若  $C_3 = 0 \Rightarrow S = 9$ 。
3. **更新  $C_4$  的取值范围为 {1}**：依据约束  $C_4 = M$ 。

## 二、约束满足问题：医生排班

某医院需安排甲、乙、丙、丁 4 名医生在周一至周五（共 5 天）进行值班，每人每周需值班 2 天，且每天至少有 1 名医生值班。额外要求：① 甲不值班周一和周五；② 乙的值班日需包含周三；③ 丙的两天值班日不能相邻；④ 任意两天的值班医生组成不能完全相同。

### 1. 变量与定义域

(2 分) 该问题的变量、定义域分别是什么？

为了满足“每人值班 2 天”的结构，定义如下：

- **变量：** {甲, 乙, 丙, 丁}
- **定义域：** 周一至周五 ( $\{1, \dots, 5\}$ ) 中任选 2 天的所有组合。
  - 初始定义域大小为  $C_5^2 = 10$  种组合。
  - 根据题目特定约束减后的初始域：
    - **甲：**  $\{\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$  (排除含 1, 5)
    - **乙：**  $\{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$  (必须含 3)
    - **丙：** 排除  $\{1, 2\}, \{2, 3\}$  等相邻组合。
    - **丁：** 所有 10 种组合。

### 2. 约束条件形式化

(3 分) 用形式化语言描述该问题的所有约束条件（包括隐含约束）

设  $V_i$  为医生  $i$  的值班日集合， $i \in \{\text{甲, 乙, 丙, 丁}\}$ 。

#### 1. 个人约束：

- $1 \notin V_{\text{甲}} \wedge 5 \notin V_{\text{甲}}$
- $3 \in V_{\text{乙}}$
- $\forall d_1, d_2 \in V_{\text{丙}}, |d_1 - d_2| > 1$

#### 2. 覆盖约束：

- $\bigcup_i V_i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

#### 3. 每日医生组成唯一性约束：

- 设  $S_d = \{i \mid d \in V_i\}$  为第  $d$  天值班的医生集合。
- $\forall j, k \in \{1..5\}, j \neq k \Rightarrow S_j \neq S_k$

### 3. 启发式变量选择

(2 分) 若采用“最少剩余值启发式”选择变量，在初始阶段应优先选择哪个变量？请说明理由

- **优先选择变量：甲**

- **理由：**计算各变量满足自身硬性约束后的剩余合法组合数：
  - **甲：**排除周一、周五，仅剩  $\{\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ ，共 **3** 个。
  - **乙：**必须含周三，共 **4** 个。
  - **丙：**排除相邻组合，共 **6** 个。
  - **丁：**无限制，共 **10** 个。

甲的剩余合法值最少，故优先选择。

## 4. 约束传播与剪枝

(3 分) 若已知乙的值班日确定为周三和周四，此时需删除哪些变量的取值组合？请列举至少 3 组并说明依据

已知  $\text{乙} = \{3, 4\}$ 。为满足“任意两天医生组成不能完全相同 ( $S_3 \neq S_4$ )”的约束，需避免其他医生对  $S_3$  和  $S_4$  做出完全相同的贡献（即不能同时在 3, 4 号值班）。

需删除的取值组合：

1. **删除变量 甲 的取值 {3, 4}。** 依据：若甲选  $\{3, 4\}$ ，且其他医生不区分这两天，会导致周三周四阵容雷同。
2. **删除变量 丁 的取值 {3, 4}。** 依据：同上，防止与乙的排班完全重叠。
3. **删除变量 丙 的取值 {3, 4}。** 依据：尽管丙因“不相邻”约束已不可选此值，但在域更新检查中，该组合因违反唯一性约束被显式标记为不可行。